
Estratto

Estratto da un prodotto in vendita su **ShopWKI**, il negozio online di Wolters Kluwer Italia

Vai alla scheda →

Wolters Kluwer opera nel mercato dell'editoria professionale, del software, della formazione e dei servizi con i marchi: IPSOA, CEDAM, Altalex, UTET Giuridica, il fisco.



Wolters Kluwer

Capitolo 1

Insiemi

1.1 Concetto di insieme

Il concetto di insieme è da considerarsi primitivo, nel senso che il suo significato è chiaro nel contesto in cui viene utilizzato. Frasi come “l’insieme dei numeri pari”, “l’insieme delle vocali del nostro alfabeto”, “l’insieme dei numeri maggiori di 1”, sono certamente familiari e non danno adito ad equivoche interpretazioni.

Gli insiemi si denotano con lettere maiuscole come A , B , S , X , Y , ecc., mentre gli elementi di un insieme si denotano con lettere minuscole.

Per indicare che x è un elemento dell’insieme A , si usa la scrittura $x \in A$ che si legge “ x appartiene ad A ”; “ $\in$ ” è il simbolo di appartenenza.

La scrittura $x \notin A$ è la negazione della precedente e si legge “ x non appartiene ad A ”.

Gli elementi di un insieme possono essere di natura qualsiasi: numeri, figure geometriche, persone, città, animali, ecc.. In questo testo ci riferiremo principalmente ad insiemi numerici.

Per descrivere un insieme ci sono sostanzialmente due modi distinti.

Il primo consiste nell’elencare gli elementi dell’insieme scrivendoli all’interno di una parentesi graffa. Ad esempio, $A = \{2, 4, 6\}$ si legge “ A è l’insieme avente per elementi

2, 4, 6".

Il secondo modo consiste nell'enunciare una proprietà che sia vera solo per gli elementi dell'insieme. Ad esempio, dicendo che "A è l'insieme dei numeri dispari minori di 100" non abbiamo indicato esplicitamente gli elementi di A, ma siamo però in grado di sapere con certezza se un elemento gli appartiene o non gli appartiene; così $7 \in A$, $24 \notin A$, $73 \in A$ ecc.

Un insieme privo di elementi, denotato con il simbolo $\emptyset$, è detto **insieme vuoto**.

L'insieme dei numeri pari che sono divisori di 11 è vuoto come pure vuoto è l'insieme dei numeri che sono contemporaneamente maggiori di 10 e minori di 3.

Due insiemi A e B si dicono **uguali**, e si scrive $A = B$, se hanno gli stessi elementi, ovvero se ogni elemento dell'uno appartiene anche all'altro e viceversa.

Ad esempio, l'insieme A dei numeri naturali che sono divisori di 6 e l'insieme B dei numeri naturali minori di 7 e diversi da 4 e 5 sono uguali.

Esercizi

1.1.1 Rappresentare, per elencazione, gli insiemi aventi per elementi:

- a) i quadrati dei primi quattro numeri interi positivi;
- b) i multipli di 7 minori di 40;
- c) i numeri dispari compresi tra 2 e 12;
- d) i divisori positivi di 16;
- e) i divisori comuni di 49 e 64;
- f) le coppie ordinate di interi positivi aventi per somma 7.

1.1.2 Descrivere i seguenti insiemi tramite una proprietà:
 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $C = \{2, 4, 8, 16, 32\}$.

1.1.3 Sia A l'insieme dei numeri pari minori di 30. Quali dei seguenti numeri x appartiene ad A?

- a) x è il triplo di 4; b) $x = 3^2$;
- c) $x = 2 \cdot 5 + 3$; d) $x = (-2)^2 + 10$; e) x è un numero primo maggiore di 10.

1.1.4 Dire quali tra i seguenti insiemi è l'insieme $\emptyset$:

- a) l'insieme dei numeri dispari divisibili per 2;
- b) l'insieme dei numeri dispari divisibili per 7;
- c) l'insieme dei numeri minori di 10 che moltiplicati per 32 superano 40;
- d) l'insieme dei numeri interi che moltiplicati per 3 sono uguali a 20;
- e) l'insieme dei divisori di 12 e 18.

1.1.5 Dire quali dei seguenti insiemi sono uguali tra loro:

$A = \{\text{numeri interi maggiori di 0 e minori di 7}\},$

$B = \{\text{numeri sulle facce di un dado}\},$

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$

$D = \{\text{resti che si ottengono dividendo un numero intero positivo per 6}\}.$

1.2 Sottoinsiemi

Sia X un insieme. Diremo che A è un **sottoinsieme** di X se gli elementi di A sono anche elementi di X .

Ad esempio, l'insieme dei numeri dispari è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali.

Un sottoinsieme può anche coincidere con l'intero insieme.

Ad esempio, l'insieme A dei multipli di 2 è un sottoinsieme dell'insieme X dei numeri pari; d'altra parte, ogni numero pari è anche un multiplo di 2 cosicchè A coincide con X .

Se A è un sottoinsieme di X ma non coincide con X , diremo che A è un sottoinsieme **proprio** di X .

Per indicare che A è un sottoinsieme di X , si usa la scrittura $A \subseteq X$ che si legge “ A è contenuto od uguale a X ”; $\subseteq$ è il simbolo di contenuto od uguale.

Il simbolo $\supseteq$ si legge “contiene od uguale”. Le scritture $A \subseteq X$ e $X \supseteq A$ sono equivalenti.

Scriveremo $A \subset X$ se A è un sottoinsieme proprio di X .

Per convenzione, l'insieme vuoto si considera come un sottoinsieme proprio di un qualsiasi insieme non vuoto.

L'insieme costituito da tutti i possibili sottoinsiemi di X è detto **insieme delle parti** di X e si denota con $\mathcal{P}(X)$.

Ad esempio, se $X = \{2, 5, 8\}$, l'insieme delle parti di X è $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{8\}, \{2, 5\}, \{2, 8\}, \{5, 8\}, \{2, 5, 8\}\}$. Si osservi che $\mathcal{P}(X)$ è costituito da 8 elementi; ciò non è casuale in quanto si può dimostrare che se X ha un numero finito n di elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

Quando si considerano insiemi che sono tutti sottoinsiemi di uno stesso insieme X ci si riferisce a quest'ultimo come all'**insieme universale**.

Per esprimere analiticamente la relazione di contenuto si può utilizzare il simbolo di implicazione " $\Rightarrow$ ", che si legge "implica". Si ha:

$$A \subseteq X \text{ se e solo se } x \in A \Rightarrow x \in X.$$

$A \subset X$ se e solo se $x \in A \Rightarrow x \in X$ ed inoltre esiste $x \in X$ con $x \notin A$.

L'uguaglianza tra insiemi può essere equivalentemente espressa nei seguenti modi:

$$A = B \text{ se e solo se } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

$$A = B \text{ se e solo se } x \in A \Rightarrow x \in B \text{ e } x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Il **complementare** di A rispetto all'insieme universale X , denotato con A^c , è l'insieme degli elementi di X che non appartengono ad A .

In simboli, $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$. Si osservi che il complementare di A^c è A ovvero vale la proprietà $(A^c)^c = A$.

Ad esempio:

- se X è l'insieme dei numeri naturali ed A è l'insieme dei numeri pari, allora A^c è l'insieme dei numeri dispari; il complementare di A^c , cioè dell'insieme dei numeri dispari, è nuovamente l'insieme dei numeri pari A ;
- se $X = \{3, 6, 8, 12, 15\}$ e $A = \{3, 8, 15\}$, allora $A^c = \{6, 12\}$;
- se X è l'insieme dei numeri reali e A è l'insieme dei numeri reali minori di 7, allora A^c è l'insieme dei numeri reali maggiori od uguali a 7.

Esercizi

1.2.1 Descrivere la relazione intercedente tra le seguenti coppie di insiemi:

- a) $A = \{\text{numeri dispari}\}$, $B = \{\text{numeri primi maggiori di } 2\}$;
- b) $A = \{\text{potenze del } 2\}$, $B = \{\text{multipli positivi del } 4\}$;
- c) $A = \{\text{multipli di } 6\}$, $B = \{\text{multipli di } 3\}$;
- d) $A = \{\text{potenze di } 6 \text{ maggiori di } 1 \text{ e minori di } 50\}$,
 $B = \{\text{divisori positivi di } 72\}$;
- e) $A = \{\text{triangoli}\}$, $B = \{\text{triangoli isosceli}\}$.

1.2.2 Descrivere il complementare di A rispetto all'insieme X :

- a) $A = \{\text{numeri naturali maggiori od uguali a } 8\}$;
 $X = \{\text{numeri naturali minori di } 15\}$.
- b) $A = \{\text{potenze del } 5 \text{ maggiori di } 1 \text{ e minori di } 30\}$;
 $X = \{\text{multipli del } 5 \text{ minori di } 40\}$.
- c) $A = \{\text{potenze del } 2 \text{ maggiori di uno e minori di } 16\}$;
 $X = \{\text{numeri pari minori di } 10\}$
- d) $A = \{\text{triangoli isosceli}\}$; $X = \{\text{triangoli}\}$;
- e) $A = \{3, 6, 10\}$; $X = \{\text{divisori di } 30\}$.

1.2.3 Sia X l'insieme dei numeri interi maggiori di 0 e minori di 10. Descrivere il complementare, rispetto all'insieme universale X , dei seguenti insiemi:

- a) $A = \{\text{multipli di } 3\}$; b) $A = \{\text{potenze di } 2\}$;
- c) $A = \{\text{divisori di } 36\}$.

1.3 Operazioni tra insiemi

Tra i sottoinsiemi di un insieme universale si possono definire varie operazioni. Siano A e B due sottoinsiemi dell'insieme universale X .

Unione di insiemi

L'unione di A e B , denotata con $A \cup B$, è l'insieme degli elementi di X che appartengono ad A oppure a B , ovvero

ad almeno uno dei due insiemi. In simboli:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

In particolare, se $A \subseteq B$, allora $A \cup B = B$.

Ad esempio, se $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, allora $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Intersezione di insiemi

L'intersezione di A e B , denotata con $A \cap B$, è l'insieme degli elementi di X che appartengono sia ad A che a B . In simboli:

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A, x \in B\}$$

In particolare, se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$.

Se A e B non hanno elementi in comune, allora $A \cap B = \emptyset$.

Ad esempio, se $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, allora $A \cap B = \{3, 5\}$.

Le operazioni di unione ed intersezione verificano varie proprietà; le più importanti sono le seguenti:

- **Proprietà commutativa**

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

- **Proprietà associativa**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

- **Proprietà distributiva di una operazione rispetto all'altra**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- **Leggi di De Morgan**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Si osservi che scambiando l'unione con l'intersezione, ogni proprietà dell'unione si trasforma nella analoga proprietà dell'intersezione e viceversa (*proprietà di dualità*).

Prodotto di insiemi

Il prodotto di due insiemi A e B , denotato con $A \times B$, è l'insieme delle coppie (a, b) ottenute scegliendo in tutti i modi possibili a in A e b in B ; si osservi che (a, b) è una coppia ordinata nel senso che $(a, b) \neq (b, a)$. In simboli:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Se $A = \{1, 3, 7\}$ e $B = \{2, 5\}$, il prodotto $A \times B$ è dato da $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 5), (7, 2), (7, 5)\}$.

Si osservi che tale prodotto ha sei elementi.

In generale, se A è un insieme di m elementi e B è un insieme di n elementi, allora $A \times B$ ha $m \cdot n$ elementi.

Esercizi

1.3.1 Sia A l'insieme dei numeri interi maggiori di 0 e minori di 20 che sono divisibili per 3 e B l'insieme dei numeri interi maggiori di 0 e minori di 17 che sono divisibili per 2.

a) Determinare $A \cap B$;

b) denotato con $X = A \cup B$ l'insieme universale, verificare che $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1.3.2 Si considerino gli insiemi $A = \{\text{numeri pari minori di } 40\}$, $B = \{\text{multipli di } 5 \text{ minori di } 40\}$, $C = \{\text{multipli di } 6 \text{ minori di } 40\}$. Determinare $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

1.3.3 Determinare $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $(A \cap C) \cup B$ essendo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$.

1.3.4 Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 12\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 7 < x \leq 15\}$, determinare $A \cap B$ è

a) l'intervallo $[0, 12]$; b) l'intervallo $(7, 12]$;

c) l'intervallo $(12, 15]$; d) l'intervallo $[0, 7)$.

1.4 L'insieme dei numeri reali: proprietà

L'insieme dei numeri reali si denota con $\mathbb{R}$; in esso sono definite le operazioni di somma e di prodotto che verificano molte proprietà deducibili dalle seguenti:

Gruppo A: proprietà della somma

- *la somma di due numeri reali è un numero reale;*
- *proprietà commutativa:*
 $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- *proprietà associativa:*
 $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R};$
- *0 è l'elemento neutro rispetto alla somma:*
 $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{R};$
- *esistenza dell'opposto:*
 $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, detto **opposto** di a e denotato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$.

Le proprietà del gruppo A si esprimono sinteticamente dicendo che $\mathbb{R}$ è, rispetto alla somma, un gruppo commutativo o abeliano.

Gruppo B: proprietà del prodotto

- *il prodotto di due numeri reali è un numero reale;*
- *proprietà commutativa:*
 $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- *proprietà associativa:*
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{R};$
- *1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto:*
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{R};$
- *esistenza dell'inverso:*
 $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, esiste un elemento di $\mathbb{R}$, detto **inverso** o **reciproco** di a , denotato con a^{-1} o con $\frac{1}{a}$, tale che
 $a \cdot a^{-1} = 1$.

Si ha inoltre la seguente proprietà che lega le operazioni di somma e prodotto:

- *proprietà distributiva:*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Le prime quattro proprietà del gruppo B si esprimono sinteticamente dicendo che $\bar{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ è, rispetto al prodotto, un gruppo commutativo o abeliano.

Il complesso delle proprietà dei gruppi A e B si esprimono sinteticamente dicendo che $\mathbb{R}$ è, rispetto alla somma e al prodotto, un corpo commutativo.

Il calcolo delle espressioni numeriche o letterali appreso nelle scuole secondarie è basato su tali proprietà. Al riguardo si ricordi che la differenza $a - b$ significa $a + (-b)$ e che la divisione $a : b$ significa $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Un terzo gruppo di proprietà sono relative all'ordinamento e al comportamento delle operazioni di somma e prodotto rispetto ad esso.

Gruppo C: proprietà dell'ordinamento

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine indicata con " $\leq$ ", avente le seguenti proprietà:

- *proprietà riflessiva:*

$$a \leq a, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

- *proprietà antisimmetrica:*

$$\text{se } a \leq b \text{ e } b \leq a, \text{ allora } a = b;$$

- *proprietà transitiva:*

$$\text{se } a \leq b \text{ e } b \leq c, \text{ allora } a \leq c \quad (1.4.1)$$

- *comportamento rispetto alla somma:*

$$\text{se } a \leq b \text{ allora } a + c \leq b + c, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1.4.2)$$

- *comportamento rispetto al prodotto:*

$$\text{se } a \leq b \text{ allora } a \cdot c \leq b \cdot c, \quad \forall c > 0 \quad (1.4.3)$$

$$\text{se } a \leq b \text{ allora } b \cdot c \leq a \cdot c, \quad \forall c < 0 \quad (1.4.4)$$

La relazione $a \leq b$, con $a \neq b$, è denotata con $a < b$; le proprietà (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4) valgono sostituendo $\leq$ con $<$.

Vale inoltre la seguente proprietà:

- *proprietà di tricotomia:*
 $\forall a, b \in \mathbb{R}$ risulta $a < b$ oppure $b < a$ oppure $a = b$.

Il complesso delle proprietà dei gruppi A, B, C si esprimono dicendo che $\mathbb{R}$ è un corpo ordinato.

Ricordiamo infine che le notazioni $a \geq b$ e $a > b$ significano rispettivamente $b \leq a$ e $b < a$.

★ Ulteriori proprietà

Dalle proprietà dei gruppi A, B e C se ne possono dedurre molte altre quali, ad esempio, le seguenti che saranno utilizzate in seguito.

- **Legge di cancellazione della somma e del prodotto**
 - i) Se $a + c = b + c$ allora $a = b$;
 - ii) se $a \cdot c = b \cdot c$, $c \neq 0$, allora $a = b$.
- **Ogni numero moltiplicato per 0 è uguale a 0**
- **Non si può dividere per zero**
- **Legge di annullamento del prodotto**
 Un prodotto di due fattori è nullo se e solo almeno uno dei due fattori è nullo ovvero, $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oppure $b = 0$.

L'insieme $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$ denota l'insieme dei numeri reali positivi o nulli, mentre $\mathbb{R}_- = \{a \in \mathbb{R} : a \leq 0\}$ denota l'insieme dei numeri reali negativi o nulli.

Il comportamento della relazione d'ordine rispetto alla somma e al prodotto implica le seguenti regole dei segni.

- ★ **La regola dei segni rispetto alla somma**
 - i) la somma di due numeri positivi è un numero positivo;
 - ii) la somma di due numeri negativi è un numero negativo.

Estratto

Estratto da un prodotto in vendita su **ShopWKI**, il negozio online di Wolters Kluwer Italia

Vai alla scheda →

Wolters Kluwer opera nel mercato dell'editoria professionale, del software, della formazione e dei servizi con i marchi: IPSOA, CEDAM, Altalex, UTET Giuridica, il fisco.



Wolters Kluwer